4) $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) récurrence

* $U_0 = -1$ on a : $\alpha \leq U_0 \leq -1$ (vraie)

* supposons que : $\alpha \leq U_n \leq -1$

montrons que : $\alpha \leq U_{n+1} \leq -1$

$\alpha \leq U_n \leq -1 \Rightarrow f(\alpha) \leq f(U_n) \leq f(-1)$ car f est croissante sur IR

d'où : $\alpha \leq U_{n+1} \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \leq -1 \Rightarrow \alpha \leq U_{n+1} \leq -1$

* conclusion : $\alpha \leq U_n \leq -1$ pour tout n ∈ IN

b) $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$

$U_n \geq \alpha \Rightarrow f(U_n) - U_n \leq 0$ d'après 2) – b)

D'où : $U_{n+1} - U_n \leq 0 \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$

La suite (U_n) est décroissante et minorée par α , elle est donc convergente.

Soit ℓ sa limite : $U_{n+1} = f(U_n)$, f est continue sur IR.

D'où : $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \alpha$; conclusion : $\lim\limits_{x \to 0^+} U_n = \alpha$

EXERCICE№19

$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + 1$; $\forall x \in [1 , +\infty[$

1) – a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{x(x-1)\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x\sqrt{x^2-1}} = +\infty$

D'où : f n'est pas dérivable à droite en 1.

b) f est dérivable sur]1 , +∞[

$f'(x) = \frac{\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)x - \sqrt{x^2-1}}{x^2} = \frac{1}{x^2.\sqrt{x^2-1}} > 0$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	|	+	
$f(x)$	1	↗	2

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1) = 2$

c) f est continue et strictement croissante sur [1 , +∞[, elle réalise donc une bijection de [1 , +∞[sur I = f([1 , +∞[) = [1 , 2[

2) –a): f^{-1} est dérivable à droite en 1 et $(f^{-1})_d(1) = 0$ (voir ex 14 , 2) – b))

b) * soit $y = f^{-1}(x)$ avec : $x \in [1 , 2[$ et $y \in [1 , +\infty[$

Qarray.tn - Agra Blech- Qarray.tn